多次元非線形ナップザック問題のGA解の評価 (不確実性の下での数理モデルの構築と最適化)

並川, 哲郎; 岩崎, 彰典; 太田垣, 博一; 仲川, 勇二

数理解析研究所講究録
1194 巻 2001 年 105-110

多次元非線形ナップザック問題のGA解の評価

姫路獨協大学　並川哲郎
岡山理科大学　岩崎彰典
岡山理科大学　太田垣博一
関西大学　仲川勇二

従来, 一次元非線形ナップザック問題の解法として動的計画法や分枝限定法などの有効なアルゴリズムが開発されてきた。しかし, 多次元非線形ナップザック問題では, それらの解法は有効ではなく, グリーディー法, 有効勾配法, 遺伝的アルゴリズム（GA）, タブーサーチなどのヒューリスティック解法が試みられてきた。それらの解法は, 制約条件がきびしい（多数の制約条件を持つ, もしくは制約許容量が小さい）ときには有効に働かない。そこで我々は, 制約条件がきびしい問題に対し, 代理制約法（SD）とGAとを適用し目的関数の上界値とGA解の与える目的関数の近似値とを比較し, GA解の評価を行う。

1　多次元非線形ナップザック問題

多次元非線形ナップザック問題はつぎの式で定式化される。

$$\text{maximize}\quad f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n)$$

$$\text{subject to}\quad g_m(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N} g_{mn}(x_n) \leq b_m, \quad m = 1, 2, \ldots, M,$$

$$x_n \in \mathcal{A}_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nK_n}\}, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

ここで, $f_n(x_n)$, $g_{mn}(x_n)$ はそれぞれ目的関数, 制約関数, b_mは制約許容量,$\mathcal{A}_n$は選択される項目の集合である。

2　代理制約法（SD）

岩崎ら [1] は代理制約法を多次元非線形ナップザック問題へ適用した。代理双対問題は次式で与えられる。

$$\min\{\mathrm{opt}[\mathrm{S}(\boldsymbol{u})] : \boldsymbol{u} \in U\},$$

ただし, opt[S($\boldsymbol{u}$)] は問題 S($\boldsymbol{u}$) の最適な目的関数値,

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{M-1})^T \in R^{M-1},$$

$$U = \{\boldsymbol{u} \in R^{M-1} : \sum_{m=1}^{M-1} u_m \leq 1, \boldsymbol{u} \geq 0\},$$

である。ここで, S($\boldsymbol{u}$) は代理問題とよばれ次式で与えられる。

$$\text{maximize} \quad f(\boldsymbol{x})$$

$$\text{subject to} \quad \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \leq \beta,$$

ただし,

$$\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m\{g_m(\boldsymbol{x}) - g_M(\boldsymbol{x})\} + g_M(\boldsymbol{x}),$$

$$\beta = \sum_{m=1}^{M-1} u_m\{b_m - b_M\} + b_M,$$

である。

代理問題の実行可能領域は, 原問題の実行可能領域をすべて含んでいるので, 代理問題の解は原問題の上界値を与える。代理制約法は, その上界値を最小化するように代理乗数$\boldsymbol{u}$を最適化しているので, 代理双対問題の解は原問題のよい上界値を与える。しかし, 代理双対問題の解は実行可能になるとは限らない。従来実行可能解を得る方法として, 有効勾配法, グリーディ法, シミュレーティッドアニーリング, 遺伝的アルゴリズム, タブーサーチ等が開発されてきた。ここでは, 遺伝的アルゴリズムを多次元非線形ナップザック問題へ適用する。

3 遺伝的アルゴリズム (GA)

遺伝的アルゴリズムは適用可能な問題の範囲が広い手法であり, 近年多次元組合せ最適化問題へ, 遺伝的アルゴリズム [2] やタブーサーチ [3] が応用されている。

遺伝的アルゴリズムを制約条件付き最適化問題へ適用するためにペナルティ関数を導入する。しかし, 問題の制約条件がきびしい時, ペナルティ関数を工夫しても生成される解集団のほとんどが実行不可能解となり, 実行可能解が得られなかったり, 得られてもよい解集団を得ることは困難である。

4 計算機実験

遺伝的アルゴリズムを多次元非線形ナップザック問題へ適用するために、各遺伝子を多次元非線形ナップザック問題の変数へ対応させ、各遺伝子として各変数のもつ項目のなかからランダムに項目を選んだ。交叉は2点交叉とした。適応度Fを次式とした。

$$\mathrm{F} = f(\boldsymbol{x}) \quad \text{実行可能解のとき}$$

$$\mathrm{F} = f(\boldsymbol{x}) - \lambda \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{n=1}^{N} g_{nm}(x_n) - b_m \right) \quad \text{実行不可能解のとき}$$

各項目の目的関数値と制約関数値をつぎのように設定し計算機実験を行った。

$$0 \leq f_n(a_{nk}) \leq 256K_n, \quad k = 1, 2, \ldots, K_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

$$0 \leq g_{mn}(a_{nk}) \leq 256K_n, \quad k = 1, 2, \ldots, K_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad m = 1, 2, \ldots, M,$$

$$f_n(a_{nk}) \text{ and } g_{mn}(a_{nk}) \text{ are all integers, and}$$

$$b_m = \left\lfloor \alpha \sum_{n=1}^{N} \Big(g_{mn}(a_{n1}) + g_{mn}(a_{nK}) \Big) \right\rfloor, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

この問題は単調増加でなく, 制約条件数が多いときや制約許容量が小さいときは初期集団の解のほとんどが実行不可能である。

乱数のseedを1,2,3とし各規模に対し3問題を解いた。表1に制約条件数を変えたときの上限値とGA解の与える近似値を示す。表2に制約許容量を変えたときの上限値とGA解の与える近似値を示す。

5 まとめ

大規模で, 制約条件のきびしい問題に対し, 代理制約法と遺伝的アルゴリズムを適用し, 遺伝的アルゴリズムの解を評価した。制約条件数が多くなると遺伝的アルゴリズムの解は品質が低下し、それは変数の数が多くなると顕著になる。また、遺伝的アルゴリズムの解は制約許容量に強く依存し、わずかに制約許容量が小さくすると遺伝的アルゴリズムの効率も解の品質も低下する。

参考文献

[1] 岩崎彰典, 太田垣博一, 仲川勇二, 宮下文彬, 成久洋之, "代理制約法の多次元非線形ナップザック問題への適用" 信学論 A, Vol. J78-A, No. 8, pp. 691-697, 1999.

[2] 坂和正敏, 加藤浩介, 柴野俊弘, 宮原伸二, "多次元整数ナップザック問題に対する3重構造文字列遺伝的アルゴリズムによる近似解法," 信学論 A, Vol. J82-A, No.5, pp. 691-697, 1999.

[3] Løkketnagen A., Glover F., "Solving zero-one mixed integer programming problems using tabu search," European Journal of Operational Rsearch, Vol. 106, pp. 624-658, 1998.

表1　制約条件数を変えた場合の上界値とGA解の与える近似値（$\alpha=0.5$）

$K=20$

			$N=100$			$N=500$			$N=1000$	
		seed=1	seed=2	seed=3	seed=1	seed=2	seed=3	seed=1	seed=2	seed=3
	上界値	487279	488315	492103	2437075	2438071	2433414	4876191	4880841	4869760
$M=1$	GAの目的関数値	487279	488158	492103	2436384	2438071	2432793	4875739	4876801	4865119
	上界値-GAの目的関数値	0	157	0	691	0	621	452	4040	4641
	上界値とGAの目的関数値の相対誤差	0	0.000322	0	0.000284	0	0.000255	9.27E-05	0.000828	0.000953
	上界値	487279	488315	492083	2436830	2437939	2432355	4876160	4880562	4869670
$M=3$	GAの目的関数値	487279	487988	492043	2435555	2436966	2429931	4875379	4874733	4863819
	上界値-GAの目的関数値	0	327	40	1275	973	2424	781	5829	5851
	上界値とGAの目的関数値の相対誤差	0	0.00067	8.13E-05	0.000523	0.000399	0.000997	0.00016	0.001194	0.001202
	上界値	487249	488301	492056	2436757	2437360	2432309	4875756	4880562	4869043
$M=5$	GAの目的関数値	487065	487798	491783	2434726	2434128	2427533	4872868	4875718	4860298
	上界値-GAの目的関数値	184	503	273	2031	3232	4776	2888	4844	8745
	上界値とGAの目的関数値の相対誤差	0.000378	0.00103	0.000555	0.000833	0.001326	0.001964	0.000592	0.000993	0.001796
	上界値	487249	488301	491888	2436701	2437360	2432204	4875349	4880281	4868893
$M=8$	GAの目的関数値	487189	487974	491551	2434039	2432744	2426087	4871080	4874317	4751544
	上界値-GAの目的関数値	60	327	337	2662	4616	6117	4269	5964	117349
	上界値とGAの目的関数値の相対誤差	0.000123	0.00067	0.000685	0.001092	0.001894	0.002515	0.000876	0.001222	0.024102

GAの世代数 ＜20000

表2 制約許容量を変えた場合の上界値とGA解の与える近似値

M=8
N=1000
K=20

	1	50	100	500	1000	5000	10000	20000		上界値
α										
0.300	−	−	−	−	−	−	−	−		−
0.307	−	−	−	−	−	−	−	−		−
0.340	8	8	8	8	8	6	6	6		4188053
0.350	8	8	8	8	8	4	2	3581392		4188053
0.400	8	8	8	7	3444529	2	3	1		4664107
0.450	8	8	7	3553801	3972854	4367680	4486006	4580036		4828476
0.460	8	8	4	3587111	4011203	4463998	4532552	4634603		4843497
0.470	8	5	2848717	3681469	4074445	4483573	4581288	4660657		4853694
0.480	7	2729962	2943712	3784566	4155262	4553295	4629358	4708519		4861082
0.490	3	2835559	3009508	3810289	4169522	4549958	4641548	4722342		4866034
0.500	2575642	2874829	3129376	3857493	4224636	4577812	4672293	4751544		4868893
0.505	2587510	2942571	3121591	3896836	4244692	4588344	4676918	4761622		4869661

実行不可能解
− 実行可能解は存在しない